$$y^2 - x(1-x)=0 \Leftrightarrow y^2 - x + x^2=0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + y^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Ainsi :(C) est le cercle de centre le point $\Omega\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$

b- $v_1 = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,dx$

Soit $h : [0;1] \longrightarrow IR; x \mapsto \sqrt{x(1-x)}$ et désignons par C_h sa courbe dans le repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

D'où v_1 est la mesure de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_h de h, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

$$M(x,y) \in C_h \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0;1] \\ y = h(x) = \sqrt{x(1-x)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0;1] \\ y^2 = x(1-x) \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M(x,y) \in (C) \\ y \geq 0 \end{cases}$$

D'où C_h est le demi-cercle de (C) se trouvant dans le demi-plan comptenant les points d'ordonnées positives.

Par suite $v_1 = \frac{1}{2}\text{Air}[(C)] = \frac{1}{2} \times \underbrace{\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}_{} = \frac{\pi}{8}$.

3/a) $\forall n \in IN^*; v_{n+1} - v_n = \int_0^1 x^{\frac{n+1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx - \int_0^1 x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$$= \int_0^1 x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} - 1)\,dx$$

• $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^{\frac{1}{2}} \leq 1$ D'où $x^{\frac{1}{2}} - 1 \leq 0; \forall x \in [0,1]$

Aussi $x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} \geq 0; \forall x \in [0,1]$

Donc $\forall x \in [0,1]; x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} - 1) \leq 0$

$\Rightarrow v_{n+1} - v_n = \int_0^1 x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} - 1)\,dx \leq 0$

Par suite (v_n) est décroissante sur IN^*

b) $\forall n \in IN^*; \forall x \in [0,1]; x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} \geq 0$

$\Rightarrow \forall n \in IN^*; v_n = \int_0^1 x^{\frac{n}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx \geq 0$

D'ou (v_n) est minorée par 0

de plus (v_n) est décroissante sur IN^* donc (v_n) est convergente.